Rappresentazione di funzioni booleane

- tabellare
- algebrica { forme canoniche < SP, PS ; forme NON canoniche
- circuitale

E' possibile passare da una rappresentazione ad un'altra equivalente

esempio

Consideriamo l'equazione

$$f(a,b,c) = a + \bar{b}c$$

in forma tabellare corrisponde a

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

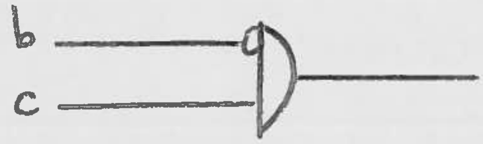
Oss Se $a=1$ $f(a,b,c)=1$ perche' 1 e' l'elemento forzante della somma

$\bar{b}c$ e' un minTermine di $f(b,c)$

↓

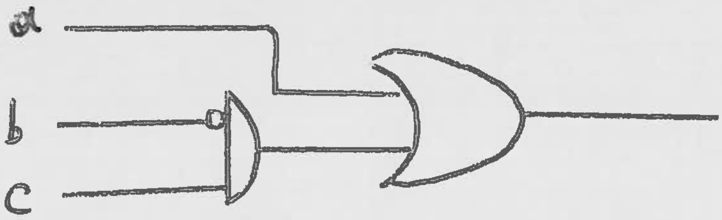
espressione in cui compaiono tutte le variabili della funzione opportunamente negate → analogamente gli elementi della produttoria nella forma canonica PRODOTTI di SOMME sono detti MAXTERMINI

$\bar{b}c$ circuitalmente corrisponde a



$a + \bar{b}c$ corrisponde a

(*)1



Costruiamo l'espressione in forma canonica SP

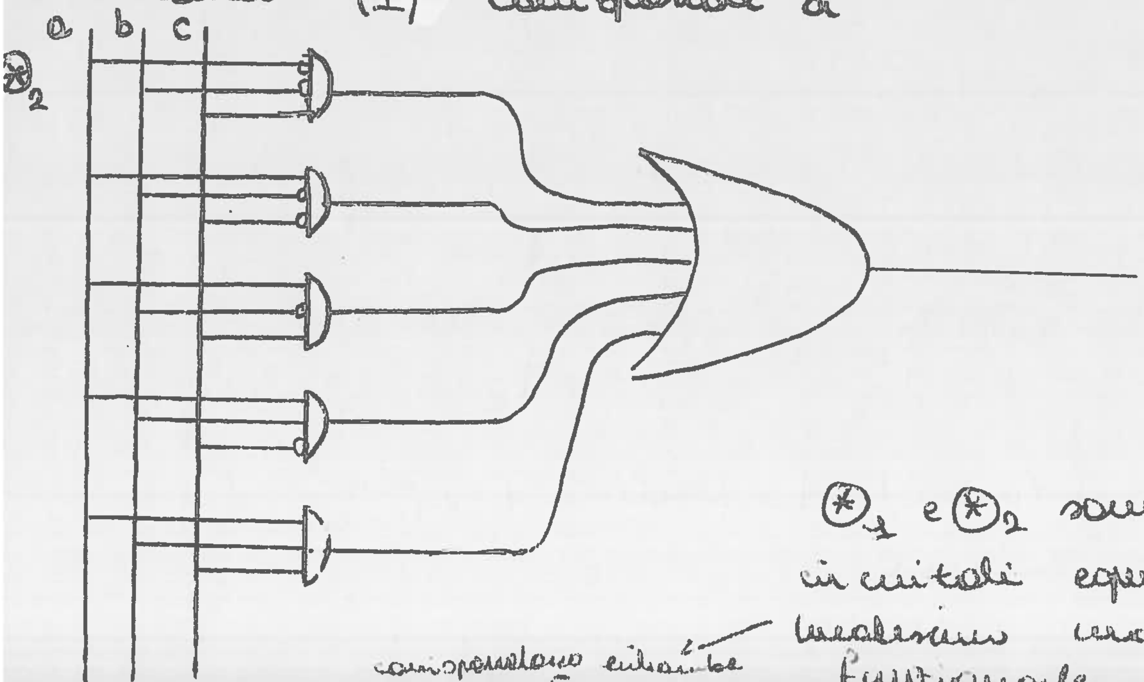
→ consideriamo le 5 righe in cui $f(a,b,c) = 1$

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc \quad (1)$$

Oss. Se a (1) aggiungiamo $+(\bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc)$ otteniamo la funzione costante 1

Circuitalmente (1) corrisponde a

(*)2



(*)1 e (*)2 sono due versioni circuitali equivalenti del medesimo modello funzionale

corrispondono entrambe a $a + \bar{b}c$

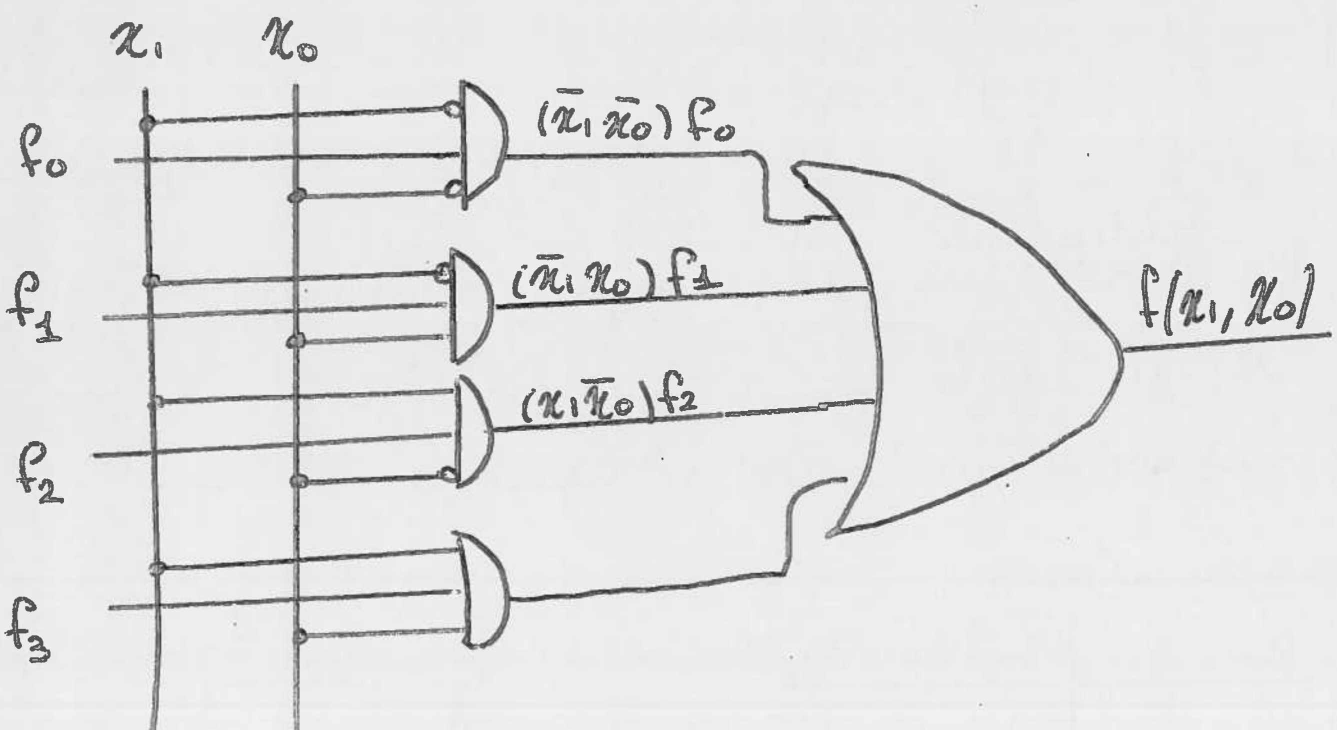
Consideriamo la tabella di una qualsiasi funzione logica in due variabili

x_1	x_0	$f(x_1, x_0)$
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

$$f(x_0, x_1) = \bar{x}_1 \bar{x}_0 f_0 + \bar{x}_1 x_0 f_1 + x_1 \bar{x}_0 f_2 + x_1 x_0 f_3$$

$$\overline{f(x_0, x_1)} = \bar{x}_1 \bar{x}_0 \bar{f}_0 + \bar{x}_1 x_0 \bar{f}_1 + x_1 \bar{x}_0 \bar{f}_2 + x_1 x_0 \bar{f}_3$$

Circuitalmente



forma canonica standard somma di prodotti

$$f(x_1, x_0) = (\bar{x}_1 \bar{x}_0) f_0 + (\bar{x}_1 x_0) f_1 + (x_1 \bar{x}_0) f_2 + (x_1 x_0) f_3$$

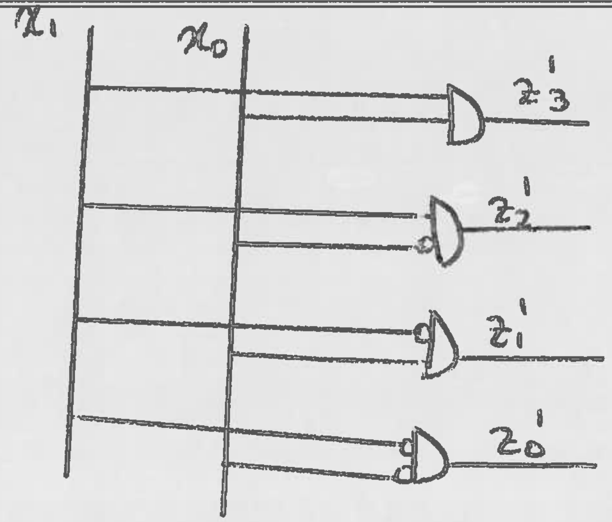
Se ora $x_1 = 0$ $x_0 = 1$

costruiamo il decoder

x_1	x_0	z'_3	z'_2	z'_1	z'_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
		x_1x_0	$x_1\bar{x}_0$	$\bar{x}_1x_0$	$\overline{x_1x_0}$ NAND

L'operatore AND agisce come riconoscitore di configurazioni binarie

→ non può succedere $z'_i = z'_j = 1$ se $i \neq j$



Il prodotto ~~logico~~ fondamentale vale 1 solo quando il prodotto delle variabili in ingresso negate è uguale a 1.
Questo avviene solo in una delle 2^n righe

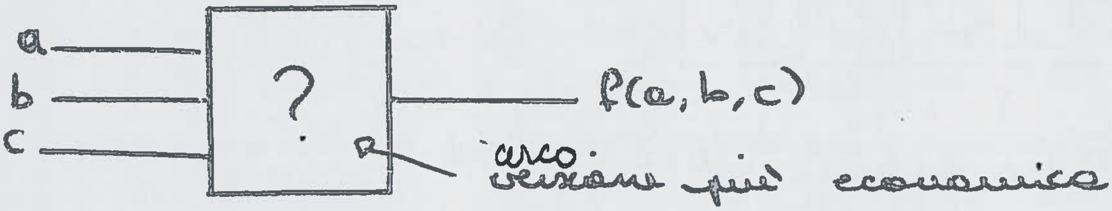
In logica negativa

x_1	x_0	z_3	z_2	z_1	z_0
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

se è 0 1
la somma
fondamentale
assume 0 in z_2
perchè $\bar{x}_1 + x_0 = 1$

Tuttavia, seppur analoghi alla medesima logica di funzionamento, modelli circuitali diversi possono avere costi diversi.

Come possiamo trovare la <u>versione minima</u> della SP?



Fino a 5 variabili esistono delle tecniche standard (es. mappe di Karnaugh).

Un altro modo immediato per semplificare una forma algebrica è sfruttare le proprietà dell'algebra booleana

es. data $f(a,b,c) = \bar a \bar b c + a \bar b \bar c + a \bar b c + a b \bar c + abc$

Ricordandosi che

(i) $x + \bar x = 1$

(ii) $x + \bar x y = x + y$, infatti →

x	y	$x+\bar x y$	$x+y$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(iii) 1 el. forzante di $\cdot$

$$(u) = \bar a \bar b c + a \bar b (c + \bar c) + ab(c+\bar c) =$$
$$= \bar a \bar b c + a \bar b + ab =$$
$$= \bar a \bar b c + a(\bar b + b) = \overset{x}{a} + \overset{\bar x}{\bar a}\, \overset{y}{\bar b c} = a + \bar b c$$

Mappe di Karnaugh

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

le caselle del lato maggiore sono ordinate secondo il codice GRAY (1 sola var. sul bit meno significativo)

la mappa di Karnaugh è un toro, difatti

10 → 00

1 → 0 (ciclico)

la suddiv. a|b,c è arbitraria l'importante è che sia una tabella bidimensionale

Procediamo poi per raggruppamenti pari di caselle contenenti 1

a \ b,c	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

maggiore il raggruppamento, maggiore la semplificazione

$$\bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c = (\bar{a}+a)\bar{b}c = \bar{b}c$$

Ora considero tutte le variabili che non cambiano valore (b,c), ignorando le altre (a)

Possiamo raggruppare tutta la seconda riga (formando quel che si dice un GRUPPO BEN FORMATO).

da cui

$f(a,b,c) = a + \bar{b}c$ è la forma non canonica minima

Raccogliendo gli 1 della seconda riga a coppie anziché a quartetto ottengo espressioni logicamente ma non circuitalmente equivalenti

———

Dato un chip di memoria $S_{bit} = 2^m \times n$, voglio costruire una memoria di dimensione

$$2^{m+h} \times (n\,2^k)$$

aumento la memoria di un fattore h e la parola dati di un fattore 2^k

Supp. $m = 20$, $n = 8$.

$$S_{chip} = 1M \times 8$$

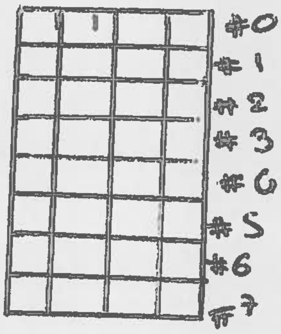
Vogliamo costruire un banco di memoria di dimensione

$$S_{banco} = 256\ \text{Mbit} = \underset{2^3 \cdot 2^{20}}{8M} \times \underset{2^5}{32}\ \text{bit}$$

$$\#\ \text{chip necessari} = \frac{S_{banco}}{S_{chip}} = \frac{256}{8} = 32$$

$$\#\ \text{chip di una schiera} = \frac{n\ \text{banco}}{n\ \text{schiera}} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\#\ \text{schiere} = \frac{\#\ \text{chip totali}}{\#\ \text{chip/schiera}} = 8$$



$$2^h = 8 \Rightarrow h = 3$$

$$\#\ \text{chip "extra"} = m\ \text{banco} - m\ \text{chip} = 23 - 20 = 3$$

a pilotare il decoder

Circuitalmente