

Stima di modelli parametrici

Dario Comanducci

1 Introduzione

La maggior parte dei problemi di computer vision sono legati alla stima di modelli avendo a disposizione dati rumorosi: stima di rette e coniche, camera calibration, stima di omografie sono alcuni esempi. Solitamente il modello da stimare può essere parametrizzato in più di un modo; ad esempio per una retta nel piano

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

$$\sin(\vartheta)x - \cos(\vartheta)y + \gamma = 0 \tag{2}$$

sono due differenti parametrizzazioni: i parametri sono $\{a, b, c\}$ nel primo caso; $\{\vartheta, \gamma\}$ nel secondo. La stima dei parametri del modello è riconducibile ad un problema di ottimizzazione: è importante la scelta della funzione da minimizzare/massimizzare (anche in relazione alla parametrizzazione scelta).

In termini del tutto generali, sia $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ il vettore dei parametri da stimare; esso permette di definire il modello tramite una funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ che dipende anche dal dato \mathbf{z} . Quando $f(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$, \mathbf{z} soddisfa il modello (come nell'esempio della retta).

Nella pratica, tuttavia i dati sono sporcati dal rumore, pertanto date n osservazioni \mathbf{z}_i il sistema di equazioni

$$\begin{cases} f(\mathbf{p}, \mathbf{z}_1) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ f(\mathbf{p}, \mathbf{z}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{3}$$

non ammette soluzione. Il problema viene affrontato introducendo una *funzione di costo* $F(\mathbf{p}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$, che deve essere ottimizzata (in genere minimizzata).

2 Minimizzazione ai minimi quadrati (LS)

La funzione di costo più facilmente impiegata è

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n) = \sum_i |\mathbf{r}_i|^2, \quad (4)$$

dove il valore non nullo $\mathbf{r}_i = f(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$, prende solitamente il nome di *residuo*.

Vediamo cosa succede nel caso di una retta, usando la parametrizzazione data dall'eq. 1 $ax + by + c = 0$. Date n misure $\mathbf{z}_i = [x_i \ y_i]^\top$, il sistema di eq. 3 può essere scritto come $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (5)$$

In assenza di rumore, la matrice \mathbf{A} (di dimensione $n \times 3$) ha rango 2; pertanto la soluzione del sistema (cioè il $\text{Ker}(\mathbf{A})$) è uno spazio vettoriale di dimensione 1 (cioè i parametri a, b, c sono definiti a meno di un fattore di scala).

In presenza di rumore la matrice ha rango 3 e $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{r} = [r_1 \dots r_n]^\top \neq \mathbf{0}$. Tentando di minimizzare direttamente $|\mathbf{r}|^2 = \sum_i r_i^2$, si ottiene la soluzione banale $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Tuttavia, essendo \mathbf{p} definito a meno di un fattore di scala, esso può essere scelto tale che $|\mathbf{p}| = 1$. Si giunge quindi al problema di ottimizzazione vincolata definito da

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \operatorname{argmin} |\mathbf{A}\mathbf{p}|^2 \\ |\mathbf{p}|^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Il problema si risolve tramite i moltiplicatori di Lagrange: la funzione da minimizzare è $F = \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{p})^\top \mathbf{A}\mathbf{p}}_{|\mathbf{A}\mathbf{p}|^2} + \lambda \underbrace{(\mathbf{p}^\top \mathbf{p} - 1)}_{|\mathbf{p}|^2}$. Differenziando rispetto a \mathbf{p}

$$\begin{aligned} dF &= d((\mathbf{A}\mathbf{p})^\top \mathbf{A}\mathbf{p}) + \lambda d(\mathbf{p}^\top \mathbf{p}) \\ &= d((\mathbf{A}\mathbf{p})^\top) \mathbf{A}\mathbf{p} + (\mathbf{A}\mathbf{p})^\top d(\mathbf{A}\mathbf{p}) + \lambda (d(\mathbf{p}^\top) \mathbf{p} + \mathbf{p}^\top d\mathbf{p}) \\ &= d(\mathbf{p}^\top \mathbf{A}^\top) \mathbf{A}\mathbf{p} + (\mathbf{p}^\top \mathbf{A}^\top) \mathbf{A} d\mathbf{p} + \lambda (d\mathbf{p}^\top \mathbf{p} + \mathbf{p}^\top d\mathbf{p}) \\ &= d\mathbf{p}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{p}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} d\mathbf{p} + 2\lambda \mathbf{p}^\top d\mathbf{p} \\ &= 2\mathbf{p}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} d\mathbf{p} + 2\lambda \mathbf{p}^\top d\mathbf{p} \\ &= 2(\mathbf{p}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \lambda \mathbf{p}^\top) d\mathbf{p} \end{aligned}$$

e imponendo $\frac{dF}{d\mathbf{p}} = \mathbf{0}^\top$, si ha

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})\mathbf{p} = -\lambda \mathbf{p} ;$$

la soluzione per \mathbf{p} è data dall'autovettore di $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ corrispondente all'autovalore più piccolo (in modulo): $|\mathbf{A}\mathbf{p}| = |\lambda||\mathbf{p}| = |\lambda|$.

2.1 Residuo come errore geometrico

In genere il valore non nullo $\mathbf{r} = f(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ non ha un particolare significato geometrico. In Computer Vision invece molti dei modelli hanno natura geometrica e può essere conveniente introdurre funzioni $f(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ che riflettano tale natura.

Ad esempio nel caso di una retta $ax + by + c = 0$ nel piano, la distanza di un punto $\mathbf{z} = [x \ y]^\top$ da essa è data da

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} . \quad (6)$$

Anche stavolta se $f(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = 0$, allora \mathbf{z} giace sulla retta. Imponendo in questo caso $a^2 + b^2 = 1$, il problema di ottimizzazione vincolata diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \operatorname{argmin} |\mathbf{A}\mathbf{p}|^2 \\ |\mathbf{B}\mathbf{p}|^2 - 1 &= 0 , \end{aligned}$$

dove \mathbf{A} e \mathbf{p} sono come in eq. 5, e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

In maniera analoga alla precedente trattazione si giunge a

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})\mathbf{p} = -\lambda \mathbf{B}\mathbf{p} ;$$

la soluzione può essere trovata tra gli autovettori generalizzati, o in alternativa espandendo il sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}\mathbf{p}} . \quad (7)$$

Dalla terza equazione del sistema in eq. 7 si ha

$$c = -a \frac{\sum x_i}{n} - b \frac{\sum y_i}{n} ;$$

sostituendo il valore di c nelle altre due, e dividendo a destra e a sinistra per n otteniamo infine

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 & \frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \frac{\sum y_i}{n} \\ \frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \frac{\sum y_i}{n} & \frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\frac{\lambda}{n} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} .$$

Anche in questo caso il valore per $[a \ b]^\top$ è dato dall'autovettore della matrice M , relativo all'autovalore più piccolo.

3 LS e gli outliers

Si può dimostrare che la stima ai minimi quadrati è la tecnica migliore in presenza di rumore con distribuzione Gaussiana.

Per outliers si intendono quei dati che sono del tutto estranei al modello che si vuol stimare (o che non seguono il pattern stabilito dalla maggioranza dei dati): essi possono essere stati raccolti a causa di rumore spurio, errori di trascrizione/trasmissione, altre strutture presenti nell'immagine e così via. Gli outliers non possono essere trattati come rumore Gaussiano, ed anche solo uno di essi può essere in grado di alterare drasticamente la stima del modello.

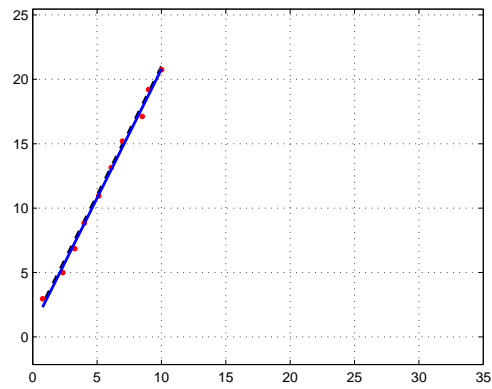
Nella Fig. 1 viene illustrato cosa succede nella stima di una retta quando i dati raccolti sono (a) perturbati da rumore Gaussiano oppure contengono outliers (b, c). La tecnica impiegata è quella del "residuo geometrico" (paragrafo 2.1). Nel caso (a) ovviamente la stima ha dato dei buoni risultati, all'estremo opposto si colloca il caso (c), in cui risulta sbagliata perfino l'orientazione della retta.

Si rendono pertanto necessari dei metodi di stima *robusti*, in grado cioè di fronteggiare la presenza degli outliers.

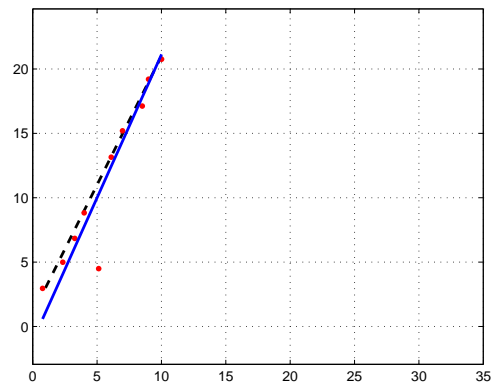
4 Metodi robusti per la stima di parametri

4.1 M-estimators

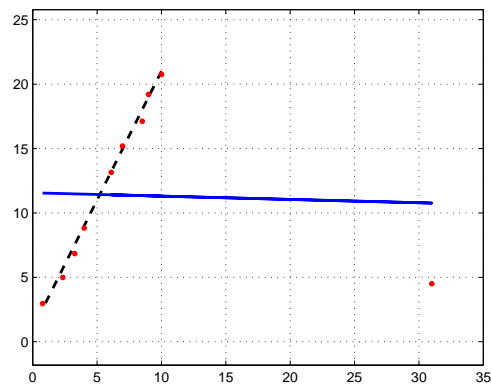
Gli M-estimators costituiscono una popolare tecnica robusta della forma $F(\mathbf{p}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n) = \sum_i \rho(r_i)$, diversi tra loro per la funzione $\rho(\cdot)$ impiegata.



(a)



(b)



(c)

Figura 1: stima di una retta ai minimi quadrati quando i dati raccolti sono perturbati da rumore Gaussiano (a) oppure contengono outliers (b, c). La linea tratteggiata rappresenta la retta da trovare; la linea continua è la stima ottenuta.

La funzione $\rho(\cdot)$ deve essere simmetrica, positiva e con un unico minimo in 0. Inoltre, al fine di assicurare che anche la funzione di costo F abbia un unico minimo rispetto a \mathbf{p} , si richiede che la funzione $\rho(\cdot)$ sia convessa nella variabile \mathbf{p} , o equivalentemente che $\frac{\partial^2 \rho(\cdot)}{\partial \mathbf{p}^2}$ sia definita non negativa.

Differenziando F rispetto a \mathbf{p} ed uguagliando a 0, si ottiene un sistema di m equazioni

$$\sum_i \psi(r_i) \frac{\partial r_i}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1 \dots m ;$$

dove $\psi(x) = d\rho(x)/dx$ viene detta *funzione di influenza*, in quanto misura l'influenza di un dato sulla stima dei parametri. Se $\rho(x) = x^2$, $\psi(x) = 2x$, cioè la funzione di influenza cresce linearmente con l'errore, a conferma della scarsa affidabilità del metodo dei minimi quadrati. Come conseguenza, un altro requisito fondamentale per $\rho(\cdot)$ è che la sua funzione di influenza sia limitata.

Alcune proposte per $\rho(\cdot)$ sono:

- $L_1 - L_2$

$$2(\sqrt{1 + r^2/2} - 1)$$

- Welsch

$$\frac{c^2}{2}[1 - \exp(-(r/c)^2)] , \quad c = 2.9846$$

- Huber

$$\begin{cases} r^2/2 & se |r| < k \\ k(|r| - k/2) & se |r| \geq k \end{cases} , \quad k = 1.345$$

i cui andamenti sono riportati in Fig. 2; i numeri “magici” per c e k sono stabiliti in modo che i due M-estimators si abbiano prestazioni confrontabili con LS in presenza di solo rumore Gaussiano sui dati.

Per gli M-estimators non esiste in generale una soluzione in forma chiusa, per cui la minimizzazione avviene effettuata con algoritmi iterativi, che però hanno bisogno di una soluzione di partenza (*bootstrap*).

4.2 LMedS, RANSAC

LMedS e RANSAC sono due algoritmi simili che esplorano lo spazio dei parametri del modello in maniera “casuale”, al fine di trovare la soluzione ottima. Possono inoltre fornire una buona soluzione di bootstrap da impiegare con gli M-estimators, per avere una stima più raffinata di \mathbf{p} .

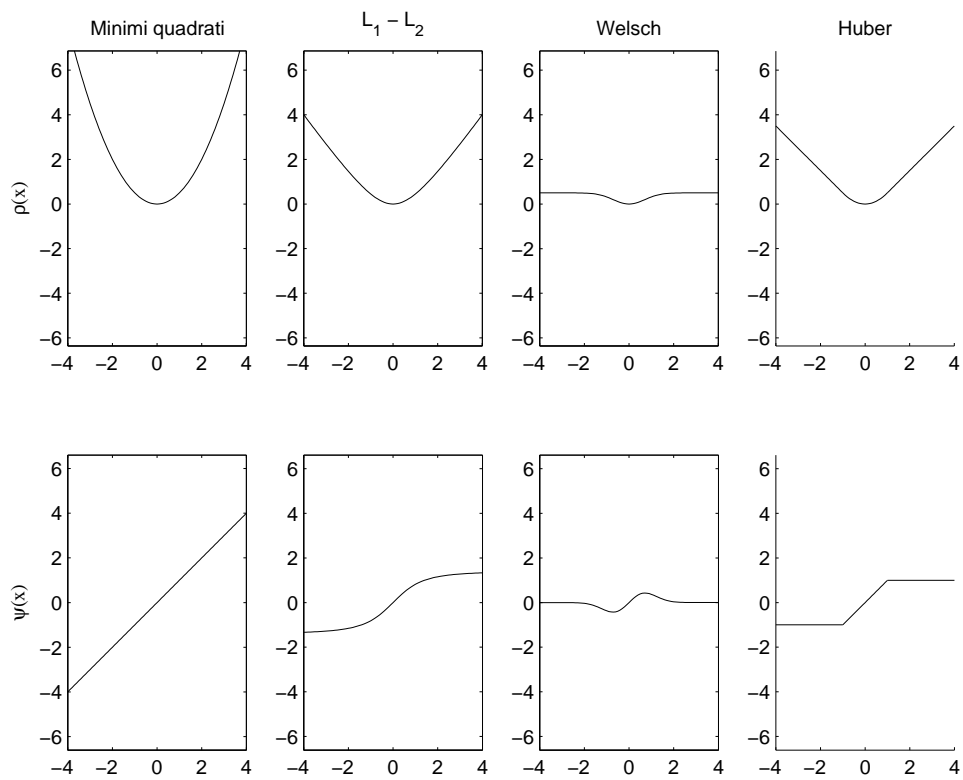


Figura 2: Alcuni M-estimators, caratterizzati secondo ρ e ψ , a confronto con LS

4.2.1 LMedS

Invece di minimizzare $\sum \rho(r_i)$, LMedS (Least Median of Squares) stima i parametri attraverso il problema di ottimizzazione non lineare

$$\mathbf{p} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} \operatorname{med} r_i^2$$

cioè si cercano i valori di \mathbf{p} che minimizzano la mediana dei residui al quadrato, piuttosto che la loro somma come in LS.

Putroppo per LMedS non è possibile formulare una soluzione in forma chiusa, né impiegare algoritmi iterativi, ma deve essere risolto attraverso una ricerca nell'insieme in cui è definito \mathbf{p} . Da un punto di vista pratico questo viene fatto esplorando N volte tale insieme in maniera casuale. Più in dettaglio lo sketch dell'algoritmo è schematizzato in Fig. 3.

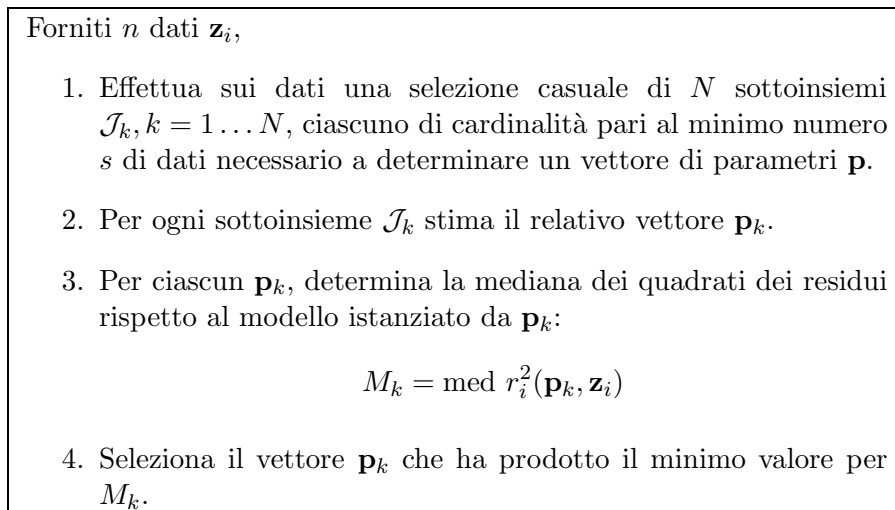


Figura 3: Schema riassuntivo per la stima robusta con LMedS

La scelta del numero N può essere effettuata se si ha un'idea della percentuale ε di outlier presenti nella popolazione dei dati. La probabilità di scegliere *un dato* non outlier è infatti $w = 1 - \varepsilon$; di conseguenza, la probabilità di aver scelto *almeno un insieme* privo di outlier su N tentativi è data da $q = 1 - (1 - w^s)^N$ (s è il minimo numero di dati necessario a determinare un vettore di parametri \mathbf{p}). Risolvendo rispetto a N , si può determinare il numero di tentativi necessario per trovare, con probabilità q , almeno un

sottoinsieme privo di outlier:

$$N = \frac{\log(1 - q)}{\log(1 - w^s)}; \quad (8)$$

solitamente, si pone $q = 0.99$.

In genere la soluzione, trovata durante l'esplorazione casuale dello spazio dei parametri, viene raffinata attraverso una minimizzazione ai minimi quadrati sui residui pesati da

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{se } |r_i| \leq \alpha \hat{\sigma} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (9)$$

dove solitamente $\alpha = 2.5$ e

$$\hat{\sigma} = 1.4826 \left(1 + \frac{5}{n - s}\right) \sqrt{\min M_k}. \quad (10)$$

Il peso nullo di eq. 9 equivale a considerare come outliers quei dati a cui viene associato, escludendoli quindi dalla stima ai minimi quadrati.

4.2.2 LMedS e rette

Dopo la trattazione generale, vediamo come applicare LMedS al problema della stima di una retta $ax + by + c = 0$: poichè per una retta bastano due punti ad individuarla, $s = 2$. Lo schema è riportato in Fig. 4.

Dati n punti $\mathbf{z}_i = [x_i, y_i]^\top$,

1. Effettua sui dati una selezione casuale di N sottoinsiemi $\mathcal{J}_k, k = 1 \dots N$, ciascuno composto da una coppia di punti distinti.
2. Per ogni sottoinsieme \mathcal{J}_k stima la retta passante per la coppia di punti, determina i residui tramite l'eq. 6 e calcola la loro mediana M_k
3. Seleziona il vettore \mathbf{p}_k che ha prodotto il minimo valore per M_k .

Figura 4: Schema riassuntivo per la stima robusta di una retta con LMedS

4.2.3 RANSAC

L'algoritmo RANSAC (RANdom SAMple Consensus) è simile a LMedS, in quanto adotta la stessa tecnica di campionamento random nello spazio dei parametri: si selezionano infatti casualmente dei sottoinsiemi di cardinalità s dall'insieme dei dati (s è sempre il minimo numero di dati necessari ad instanziare un modello). La differenza è data dall'analisi condotta: invece di osservare la mediana dei residui, si determina quanti dati hanno un residuo dal modello inferiore ad una certa soglia t . Al termine, si determina il sottoinsieme più numeroso, l'*insieme di consenso* \mathcal{C} . Il numero di tentativi N è aggiornato durante l'esecuzione dell'algoritmo in base all'eq. (8), in cui la stima per w è data dal rapporto tra la cardinalità dell'insieme di consenso corrente ed il numero complessivo di dati. La soglia t rende RANSAC meno generale rispetto a LMedS; d'altra parte gli consente, di affrontare una maggiore quantità di outlier. Lo schema generico per RANSAC è riportato in Fig. 5.

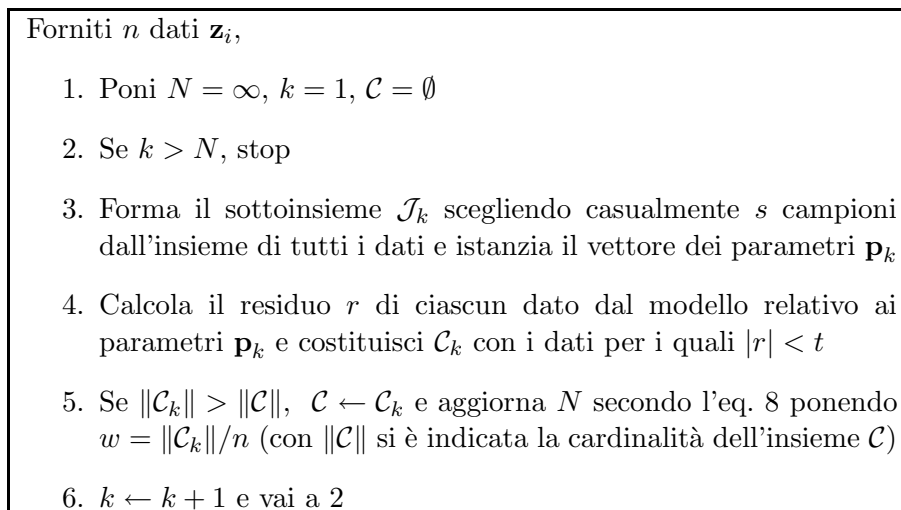


Figura 5: Schema riassuntivo per la stima robusta con RANSAC

4.2.4 RANSAC e le omografie

Vediamo come impiegare RANSAC in un altro tipico problema di Computer Vision: la stima dell'omografia tra una coppia di immagini. Date 2 immagini \mathcal{I} e \mathcal{I}' , si suppone di avere n coppie di punti $\{(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \mid \mathbf{z}_i \in$

$\mathcal{I}, \mathbf{z}'_i \in \mathcal{I}', i = 1 \dots n$ ritenute in corrispondenza secondo un'omografia \mathbf{H} , dalle quali devono essere eliminate le coppie outlier. Per la stima di un'omografia bastano quattro coppie di punti, per cui $s = 4$. Invece dell'errore algebrico impiegato dall'algoritmo DLT (cfr. lezione Prof.), usiamo per il calcolo dei residui la distanza d_{\perp} fornita dal *Symmetric Transfer Error*: $d_{\text{STE}}^2 = d(\mathbf{z}', \mathbf{H}\mathbf{z})^2 + d(\mathbf{z}, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{z}')^2$, cioè la somma della distanza al quadrato tra $(\mathbf{z}', \mathbf{H}\mathbf{z})$ e quella tra $(\mathbf{z}, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{z}')$; il Symmetric Transfer Error permette di minimizzare gli errori in entrambe le immagini. Lo schema è riportato in Fig. 6.

- Date n coppie $(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i)$,
1. Poni $N = \infty, k = 1, \mathcal{C} = \emptyset$
 2. Se $k > N$, stop
 3. Forma il sottoinsieme \mathcal{J}_k scegliendo casualmente 4 campioni dall'insieme di tutte le coppie e calcola l'omografia \mathbf{H}_k attraverso l'algoritmo DLT, tale che $\mathbf{z}' = \mathbf{H}_k\mathbf{z} \forall (\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{J}_k$
 4. Su tutte le coppie $(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i)$ a disposizione, calcola la distanza euclidea d_{STE} tra \mathbf{z}'_i e $\mathbf{H}_k\mathbf{z}_i$, e costituisci \mathcal{C}_k con i dati per i quali $d_{\text{STE}} < t$
 5. Se $\|\mathcal{C}_k\| > \|\mathcal{C}\|$, $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_k$ e aggiorna N secondo l'eq. 8 ponendo $w = \|\mathcal{C}_k\|/n$ (con $\|\mathcal{C}\|$ si è indicata la cardinalità dell'insieme \mathcal{C})
 6. $k \leftarrow k + 1$ e vai a 2

Figura 6: Schema riassuntivo per la stima robusta di un'omografia con RANSAC

Al termine del campionamento casuale si esegue una minimizzazione al variare di \mathbf{p} sugli elementi dell'insieme di consenso; la funzione di costo è data da

$$\sum_{(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \in \mathcal{C}} d_{\perp}(\mathbf{z}', \mathbf{H}\mathbf{z})^2 + d_{\perp}(\mathbf{z}, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{z}')^2 .$$

Dal momento che la funzione di costo è non lineare su \mathbf{p} (costituito in questo caso dagli elementi di \mathbf{H}), il minimo viene individuato con algoritmi iterativi (Levenberg-Marquardt, solitamente) a partire dalla soluzione fornita da RANSAC. Segue infine una successione di riclassificazione/minimizzazione

sui dati in base alla nuova stima di H , fino a convergenza degli inlier trovati. In Fig. 7 è illustrato un esempio di stima dell'omografia tra due immagini.

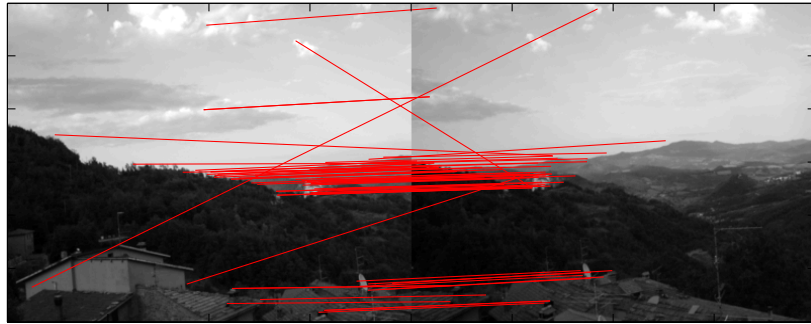
4.3 Hough Transform (HT)

Lo stimatore Hough Transform, dovuto a Hough (1959), è spesso utilizzato per estrarre linee da un'immagine binaria; la sua implementazione può comunque essere estesa alla stima di altri modelli.

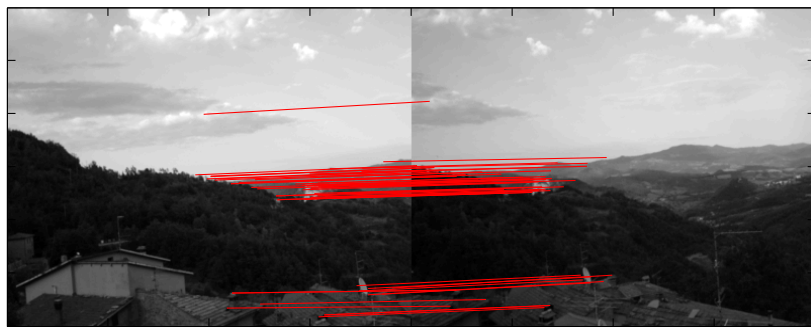
Supponiamo di avere un insieme di m punti nel piano $\mathbf{z}_i = [x_i, y_i]$, e di voler stimare la retta che meglio li descrive. Dato un punto \mathbf{z}_i , il fascio di rette che passa per esso è esprimibile come $\sin(\vartheta)x_i - \cos(\vartheta)y_i + \gamma = 0$ (eq. 2) e i suoi parametri sono ϑ e γ ; dualmente, considerando lo spazio che questi parametri definiscono (detto *dominio di Hough*), ciascun punto \mathbf{z}_i definisce in esso una curva data da $C_i = \{(\vartheta, \gamma) | \gamma = \cos(\vartheta)y_i - \sin(\vartheta)x_i\}$. Se i punti \mathbf{z}_i sono tutti allineati, tutte le curve C_i si incontrano nello stesso punto $\mathbf{p} = (\hat{\vartheta}, \hat{\gamma})$ dell'accumulatore.

Nella pratica, HT è realizzato come segue. Innanzitutto lo spazio dei parametri viene campionato con una griglia uniforme; ad ogni campione corrisponde una cella in una tabella, detta *accumulatore*, in cui annotare il numero di curve C_i che attraversano il punto; la cella con il maggior punteggio fornisce la stima della retta originaria. Se si stanno cercando più rette, si fissa una soglia e le celle che la superano individuano le rette nell'immagine. In presenza di rumore i picchi dell'accumulatore possono essere "sfumati" e non facilmente rilevabili; per ovviare a questa situazione si può procedere con tecniche di clustering oppure eseguire un fitting della "superficie" dell'accumulatore ed individuare i punti di massimo sulla superficie parametrizzata. Gli outlier generano invece delle curve che intersecano in punti casuali le curve derivate dagli altri punti, per cui possono essere facilmente discriminati. In Fig. 8 viene illustrato l'accumulatore di HT per un'immagine con 4 rette nel caso ideale (a), con inliers rumorosi (b) e con outliers (c).

La generalizzazione di HT a modelli che non siano rette segue lo stesso meccanismo di quantizzazione e raccolta dei voti: per ogni dato si determina nel dominio di Hough il luogo dei parametri relativi ai modelli che descrivono il dato; si incrementa il valore di tutte le celle attraversate da ciascun luogo e si seleziona la cella con il punteggio maggiore. Dal momento che le dimensioni dell'accumulatore crescono rapidamente all'aumentare del numero di parametri, HT non viene di solito impiegato nella stima di modelli con più di tre parametri.



(a)

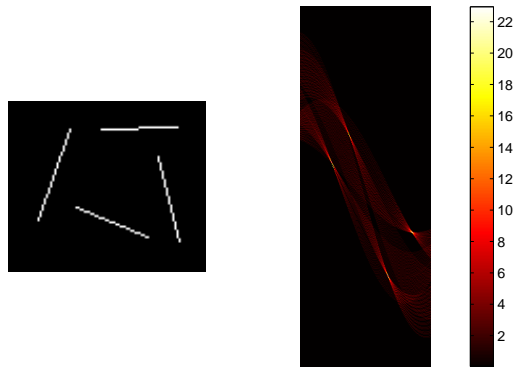


(b)

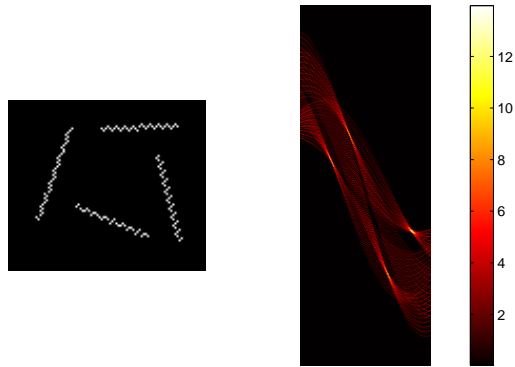


(c)

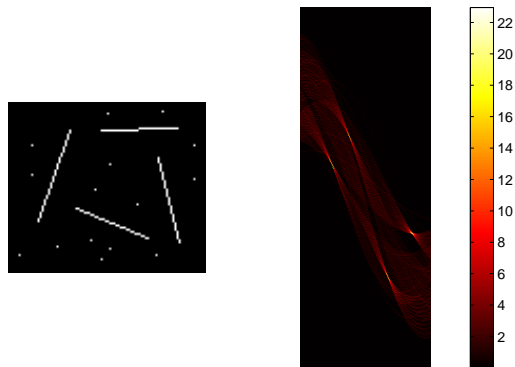
Figura 7: Stima dell'omografia tra due immagini: (a) corrispondenze putative; (b) inliers effettivi trovati con RANSAC (c); mapping calcolato sugli inliers.



(a)



(b)



(c)

Figura 8: Hough Transform per rette. A sinistra, alcune rette in un'immagine; a destra l'accumulatore della Hough Transform. (a) Caso ideale. (b) Inliers rumorosi. (c) Presenza di outliers.